Roll No. .....

BSC-12 (Bachelor of Science)
Mathematics

Second Year, Examination-2014

MT-04

Real Analysis & Metric Space
वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्ठी

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 30

Note : This paper is of thirty (30) marks divided into three (03) sections. Learners are required to attempt the questions contained in these sections according to the detailed instructions given therein.

नोट : यह प्रश्न-पत्र तीस (30) अंकों का है जो तीन (03) खंडों में विभाजित है। शिक्षार्थियों को इन खंडों में दिए गए विस्तृत निर्देशों के अनुसार ही प्रश्नों को हल करना है।

Section - A (खण्ड-क)

(Long answer type Questions) / (दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'A' contains four (04) long-answer-type questions of 7½ marks each. Learners are required to answer any two (02) questions only. (2×7½=15)

नोट : खंड 'क' में चार (04) दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न दिए गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए 7½ अंक निर्धारित हैं । शिक्षार्थियों को इनमें से केवल दो प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

1. Show that every continuous function defined on interval [a, b] is Riemann integrable.

   अन्तराल [a, b] पर परिभाषित प्रत्येक संतत् फलन [a, b] पर रीमान समाकलनीय होता है ।

2. Show that if a function is continuous in a closed interval [a, b] then it is bounded.

   दर्शायें कि संवृत्त अन्तराल [a, b] पर संतत् फलन, संवृत अन्तराल [a, b] में परिबद्ध भी होता है ।

3. Define cauchy's sequence. Show that every cauchy sequence is bounded.

   कोशी अनुक्रम की परिभाषा दीजिये दर्शायें कि प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होती है ।

4. Let (X, d) be a metric space and D is define on X by D (x, y) $= \frac{d(x,y)}{1 \square d(xy)} \square x, y \square X$ Show that (X, D) is a metric space,.

   माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा D, X पर निम्न प्रकार परिभाषित है D (x, y) $= \frac{d(x,y)}{1 \square d(xy)} \square x, y \square X$

   प्रदर्शित कीजिये कि (X, D) एक दूरीक समष्टि है ।

Section - B (खण्ड-ख)

(Short answer type Questions) / (लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Section 'B' contains eight (08) short-answer-type questions of 2½ marks each. Learners are required to answer any four (04) questions only. (4×2½=10)

नोट : खंड 'ख' में आठ (08) लघु उत्तरों वाले प्रश्न दिए गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए 2½ अंक निर्धारित हैं । शिक्षार्थियों को इनमें से केवल चार प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

1. Show that if $\lim_{n\to\infty} f_n = l$, where $f_n > 0$, $\forall n \in N$, then

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 f_2 \ldots f_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

दर्शाये कि यदि $\lim_{n\to\infty} f_n = l$, जहाँ $f_n > 0$, $\forall n \in N$, तब

$$\lim_{n\to\infty} (f_1 f_2 \ldots f_n)^{\frac{1}{n}} = l$$

2. If f is a continuous function in a closed interval [a, b], then f attains its supremum and infimum at least once in [a, b].

संवृत्त अन्तराल [a, b] में संतत् फलन f, [a, b] में न्यूनतम एक बार अपने उच्चक तथा निम्नक को ग्रहण करता है ।

3. Verify Rolle's theorem for $f(x) = 8x - x^2$ in [2, 6]

अंतराल [2, 6] में फलन $f(x) = 8x - x^2$ के लिए शेल प्रमेय का परीक्षण कीजिये ।

4. Show that for function $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 \square y^2}$, repeated limit exist at (0, 0) but simultaneaus limit does not exist at (0, 0)

सिद्ध कीजिये कि फलन $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 \square y^2}$ की बिन्दु (0, 0) पर पुनरावृत सीमा का आस्तित्व है परन्तु युगपत सीमा विद्यमान नहीं है ।

5. If f ℜR [a, b], then modulus function | f | is also Riemann integrable.

यदि f ℜR [a, b], तब मापांक फलन | f| भी [a, b] पर रीमान समाकलनीय होता है ।

6. Show that the sequence $< f_n >$, where $f_n(x) = \frac{x}{1 \square nx^2} \square x \square R$ converges uniformly on R.

प्रदर्शित कीजिये की अनुक्रम $< f_n >$, जहाँ $f_n(x) = \frac{x}{1 \square nx^2} \square x \square R$ एक समान अभिसारी है ।

7 Let R be set of real numbers. A function $d : R \times R$ ✸ R is defined as $d(x, y) = |x - y|$, $\square$ x, y $\square$ R then (R, d) is a metric space.

माना कि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है एक फलन $d : R \times R$ ✸ R निम्न प्रकार से परिभाषित है $d(x, y) = |x - y|$, $\square$ x, y $\square$ R तब (R, d) एक दूरीक समष्टि है ।

8. Define convergence of a sequence in a metric space with cxamplc.

दूरीक समष्टि में अनुक्रम का अभिसरण की परिभाषा उदाहरण सहित दीजिये।

Section - C (खण्ड-ग)

(Objective type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective-type questions of ½ mark each. All the questions of this section are compulsory. (10×½=5)

नोट : खंड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिए गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए ½ अंक निर्धारित है । इस खंड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

Write 'T' for the sentence 'F' for false sentence :

सही वाक्यों के लिये 'T' तथा गलत वाक्यों के लिये 'F' लिखें :

1. By Archimedean Property if $x > 0$ and $y \in R$, then $\exists n \in N : nx < y$ .....

   आर्किमिडीय गुणधर्म के द्वारा यदि $x > 0$ तथा $y \in R$ तब $\exists n \in N : nx < y$ .....

2. $|x|$ is differential at origin .....

   $|x|$ मूल बिन्दु पर अवकलीय है .....

3. Constant function is always Riemann integrable.

   स्थिरांक फलन हमेशा रीमान समाकलनीय होता है ।

4. For usual metric closed sphere is closed interval.....

   समान्य दूरीक में संवृत्त गोलक परिबद्ध संवृत्त अन्तराल होता है ।

5. If $\overline{A}$ is closure of A, then $\overline{A}$ is a closed set.

   यदि $\overline{A}$, A का संवरक है, तब $\overline{A}$ संवृत्त होगा ।

Choose the correct alternative

सही उत्तर को चुनें :

6. Value of $\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}}$ is

(a) 0

(b) 1

(c) – 1

(d) 2

$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}}$ का मान होगा

(a) 0

(b) 1

(c) – 1

(d) 2

7. If f is Riemann integrable then :

(a) $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

(b) $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$

(c) $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$

(d) None

यदि f रीमान समाकलनीय है तब

(a) $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

(b) $\underline{\int_a^b} f \neq \overline{\int_a^b} f$

(c) $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$

(d) इनमें से कोई नहीं

8. If (X, d) is a metric space. Let A and B are subsets of X, then

(a) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(c) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) None

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A और B, X के कोई उपसमुच्चय हैं, तब

(a) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(c) $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) इनमें से कोई नहीं

9. Limit point of sequence $< (-1)^n >$ is :

(a) 1

(b) – 1

(c) Both

(d) None

अनुक्रम $< (-1)^n >$ का सीमा बिन्दु है :

(a) 1

(b) – 1

(c) दोनों

(d) कोई नहीं

10. If f is Riemann integrable then

(a) |⇩f|❍⇩❁f|

(b) |⇩f|⌑⇩❁f|

(c) |⇩f|❑⇩❁f|

(d) None

यदि f रीमान समाकलनीय है तब

(a) |⇩f|❍⇩❁f|

(b) |⇩f|⌑⇩❁f|

(c) |⇩f|❑⇩❁f|

(d) कोई नहीं