Roll No. .....

BSC-12 (Bachelor of Science)
Mathematics
Third Year Examination-2015
MT-09
Algebra
(बीजगणित)

Time : 3 Hours **Maximum Marks :** 30

Note : The Question paper is divided into three section A, B and C. Attempt Questions of each section according to given instruction.

नोट : यह प्रश्न-पत्र क, ख और ग तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक के निर्देशानुसार प्रश्नों का उत्तर दें।

Section - A / खण्ड-क

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Answer any two questions. All questions carry equal marks. (2×7½=15)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. If (R, + , .) is a ring and $a \in R$, then prove that the S is a subring of R if and only if $S = \{x \in R: ax = 0\}$

   यदि (R, + , .)एक वलय है तथा $a \in R$, तब सिद्ध कीजिए की S, Rका उपवलय है यदि और केवल यदि

   $\{x \in R: ax = 0\}$

2. A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if each left coset of H in G is a right coset of H in G.

एक समूह G के एक उपसमूह H को प्रसामान्य उपसमूह है यदि और केवल यदि जब प्रत्येक बाई सहकुलक H का G में दाईं सहकुलक हो।

3. Let V(F) to a vector space oven a field F, and 0 is scalar $\bar{0}$ be the zero vector of V then

(i) $a\bar{0} = \bar{0} \ \forall \ a \in f$

(ii) $o\alpha = \ \forall \ a \in V$

(iii) $a(-\alpha) = -(a\alpha) \ \forall \ a \in f, \alpha \in V$

(iv) $(-a)\alpha = -(a\alpha) \forall \alpha \in F, \forall \alpha \in V$

(v) $a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta \ \forall \ \alpha \in F \ \forall a \in V, \beta \in V$

(vi) $a\alpha = \bar{0} \Rightarrow a = 0$ or $\alpha = \bar{0}$

यदि V(f) एक संदिश समष्टि है तथा V का शून्य संदिश $\bar{0}$ है तथा F को योज्य तत्समक अवयव है तब

(i) $a\bar{0} = \bar{0} \ \forall \ a \in f$

(ii) $o\alpha = \ \forall \ a \in V$

(iii) $a(-\alpha) = -(a\alpha) \ \forall \ a \in f, \alpha \in V$

(iv) $(-a)\alpha = -(a\alpha) \forall \alpha \in F, \forall \alpha \in V$

(v) $a(\alpha - \beta) = a\alpha - a\beta \ \forall \ \alpha \in F \ \forall a \in V, \beta \in V$

(vi) $a\alpha = \bar{0} \Rightarrow a = 0$ or $\alpha = \bar{0}$

4. The necessary and sufficient condition for a vector space V(F) to be a direct sum of its two subspaces w_1 and w_2 are that

(i) $V = w_1 + w_2$

(ii) $w_1 \cap w_2 = \{0\}$ i.e. w_1 and w_2 are disjoint.

एक संदिश समष्टि के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त अपने दो उपसमष्टियाँ w_1 और w_2 के लिए

(i) $V = w_1 + w_2$

(ii) $w_1 \cap w_2 = \{0\}$ अर्थात w_1 और w_2 पूर्णतः अलग हैं।

Section - B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) (लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Answer any four (04) questions. Each question carries equal marks. (4×2½=10)

नोट : किन्ही चार (04) प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. Let (G, .) is a group, then show that

(i) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall\ a, b \in G$

(ii) $ca = cb$ and $a = b\ \forall\ a, b, c \in G$

यदि (G, .) एक समूह है तो

(i) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \forall\ a, b \in G$

(ii) $ca = cb$ and $a = b\ \forall\ a, b, c \in G$

2. If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ then find $\alpha^{-1}\beta\alpha$

यदि $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 8 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ तब $\alpha^{-1}\beta\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. The intersection of two subring of R is again a subring

सिद्ध कीजिए कि वलय R के किन्ही दो उपवलयों का सर्वनिष्ट भी R का एक उपवलय होता है।

4. If R is a ring for $x \in R$ the set $A = \{a \in R \mid ax = 0\}$ then A is left ideal of R.

माना x,वलय R का कोई नियत अवयव है तब समुच्चय $A = \{a \in R \mid ax = 0\}$ R की वाम गुणजावली है।

5. Show that the set $G = \{1, -1\}$ is a finite abelan group of order 2 under multiplication as composition.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $G = \{1, -1\}$ परिमित क्रमविनिमेय समूह है। यह दो कोटि का समूच्चय गुणा के अधीन है।

6. Define Homomorphism and Isomorphism

समाकारिता और तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।

7. If $f : R \to R^1$ is mapping from ring (R, +, .) to ring (R^1, +, .) is homomorphism then

(i) $f(o) = o^1$ where o and o^1 are additive identity of R and R^1 respectively.

(ii) $f(-a) = -f(a) \ \forall \ a \in R$

यदि $f : R \to R^1$ फलन वलय (R, +, .) से वलय (R^1, +, .) पर एक समाकारिता है तब

(i) $f(o) = o^1$ जहाँ o और o^1 क्रमशः वलयों R तथा R^1 के योग के तत्समक अवयव हैं।

(ii) $f(-a) = -f(a) \ \forall \ a \in R$

8. Let S = {u, v, w} is lenearly independent set of vector space V(F) then prove that

S_1 = {u + v, v + w, w + u} is lenearly independent.

माना कि S = {u, v, w} किसी सदिश समष्टि V(F) का एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय है। प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय

S_1 = {u + v, v + w, w + u} एकघातत: स्वतन्त्र है।

Section - C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective-type questions of ½ mark each. All the questions of this section are compulsory. (10×½=5)

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए एक (½) अंक निर्धारित है । इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

1. The value of $w^2.w^2$ is ..... .

   मान ज्ञात करो $w^2.w^2$ का मान होगा ..... .

2. ..... group is called abelian grop.

   ..... समूह को आबेली समूह कहा जाता है।

3. Every subgroup of (Z, +) is ..... .

   (Z, +) का प्रत्येक उपसमूह ..... .

Write T for True and F for False

सत्य कथनों के लिये T तथा असत्य कथनों के लिये F लिखें।

4. For every group there exist at least two normal subgroup.

   प्रत्येक समूह में कम से कम दो प्रसामान्य उपसमूह होते हैं।

5. V is a vector space over the field F then (V, +) is not a comnutative group.

   यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है तो (V, +) क्रमविनिमेय समूह नही होता है।

6. If $V = \{(a, b) : a, b \in R\}$ is a vector space and subspace $w_1 = \{(a, o) : a \in R\}$, $w_2 = \{(o, b) : b \in R\}$ then v =

   (a) $w_1 - w_2$ (b) $w_1 + w_2$

   (c) $\frac{w_2}{w_1}$ (d) $\frac{w_1}{w_2}$

   माना $\{(a, b) : a, b \in R\}$ एक सदिश समष्टि है, $w_1 = \{(a, o) : a \in R\}$, $w_2 = \{(o, b) : b \in R\}$ उपसमिष्टिया हैं v की तब v =

   (a) $w_1 - w_2$ (b) $w_1 + w_2$

   (c) $\frac{w_2}{w_1}$ (d) $\frac{w_1}{w_2}$

7. The order of cycle $f = \begin{pmatrix} 1\,4\,3\,5\,2\,6 \\ 4\,3\,5\,1\,2\,6 \end{pmatrix}$ is

   (a) 1 (b) 2

   (c) 3 (d) 4

चक्र की कोटी है $f = \begin{pmatrix} 1\,4\,3\,5\,2\,6 \\ 4\,3\,5\,1\,2\,6 \end{pmatrix}$

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

8. A ring is called a boolean ring (R, +, .) if

(a) $a.a = 1 \ \forall \ a \in R$

(b) $a.a = a \ \forall \ a \in R$

(c) $a = 1 \ \forall \ a \in R$

(d) none of these

एक वलय को बूलीय वलय कहलाता है यदि

(a) $a.a = 1 \ \forall \ a \in R$

(b) $a.a = a \ \forall \ a \in R$

(c) $a = 1 \ \forall \ a \in R$

(d) इनमें से कोई नही

9. Which is an example of prime field

(a) (Z, + X)

(b) (R, +, X)

(c) $(Z_4, +_4, X_4)$

(d) $(Z_5, +_5, X_5)$

निम्नलिखित में से अभाजय क्षेत्र है

(a) (Z, + X)

(b) (R, +, X)

(c) $(Z_4, +_4, X_4)$

(d) $(Z_5, +_5, X_5)$

10. (Z, +, .), False statement

(a) It is a principle ideal domain

(b) It is a ring

(c) It is not a field

(d) None of these

(Z, +, .) के लिए असत्य है

(a) यह मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

(b) यह वलय है।

(c) यह क्षेत्र नहीं है।

(d) इनमे से कोई नही।