Roll No. .....

BSC-12 (Bachelor of Science) Mathematics
Second Year Examination-2015
MT-04
Real Analysis and Metric Space
वास्तविक विश्लेषण एवं दूरीक समष्ठी

Time : 3 Hours **Maximum Marks :** 30

Note : The Question paper is divided into three section A, B and C. Attempt Questions of each section according to given instruction.

नोट : यह प्रश्न-पत्र क, ख और ग तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक के निर्देशानुसार प्रश्नों का उत्तर दें।

Section - A / खण्ड-क

(Long Answer Type Questions)/(दीर्घ उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Answer any two questions. All questions carry equal marks. (2×7½=15)

नोट : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. Prove that the sequence $\{x_n\}$ is convergent and its limit lies between 2 and 3, where $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \forall n \in N$

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ एक अभिसारी है तथा इसकी सीमा 2 एवं 3 के मध्य है। जहाँ $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ \forall n \in N$

2. Prove that $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$

सिद्ध कीजिए $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)...(2n)}{n^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$

3. Let the usual metric $d(x, y) = |x - y|$ in closed interval [0, 1], find $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ and $\overline{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

समुच्चय [0, 1] में सामान्य दूरीक $d(x, y) = |x - y|$ के लिए ज्ञात कीजिए $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ और $\overline{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

4. Let (x, d_1) and (y, d_2) are two metrix space and f is a mapping from x to y. Show that f is continuous for $x_0 \in X$ if and only if $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

माना (x, d_1) तथा (y, d_2) दो दूरीक समष्टियाँ है तथा f, x से y मे एक फलन है। प्रदर्शित कीजिये कि f, $x_0 \in X$ संतत् होगा यदि और केवल यदि $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Section - B / खण्ड-ख

(Short Answer Type Questions) (लघु उत्तरों वाले प्रश्न)

Note : Answer any four (04) questions. Each question carries equal marks. (4×2½=10)

नोट : किन्ही चार (04) प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. Show that the set of real number R is connected set.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R सम्बंद्ध समुच्चय है।

2. Find the limit point of the sequence $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \forall\, n \in N$

अनुक्रमों की समी बिन्दु ज्ञात कीजिए

$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \forall\, n \in N$

3. For what value of K function f define as

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - kx \,;\, x > 1 \\ 5x - 3k \;\;;\, x \le 1 \end{cases}$$

is continuous at x = 1 ?

K के किस मान के लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - kx \,;\, x > 1 \\ 5x - 3k \;\;;\, x \le 1 \end{cases}$$

x = 1 पर संतत् होगा?

4. Let the function $f(x) = \frac{1}{x} \forall x \in [1,2]$ then for partition

$P = \left\{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\right\}$ of $[1,2]$ the find the value of L(P,f) and V(P,f)

यदि फलन $f(x) = \frac{1}{x} \forall x \in [1,2]$ तथा यदि

$P = \left\{1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2\right\}$, [1, 2] का कोई विभाजन है तब L(P,f) एवं V(P,f) की गणना कीजिए।

5. Find the value of $\int_0^1 \left[3x^2 \cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2}\right]dx$

मान ज्ञात कीजिए

$\int_0^1 \left[3x^2 \cos\frac{1}{x^2} + 2\sin\frac{1}{x^2}\right]dx$

6. Show that for the sequence whose sum of n terms is $\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $0 \le x \le 1$ term by term differentiation at x = 0 is not possible.

प्रदर्शित कीजिये कि अनुक्रम जिसके n पदों का योगफल $\frac{nx}{1+n^2x^2}$, $0 \le x \le 1$, बिन्दु पर $x = 0$ पदशः अवकलन संभव नहीं है।

7. (x, d) be a metric space, then show that

$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \le d(x_1x_2) + d(y_1, y_2) \; \forall \; x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$

यदि (x, d) एक दूरीक समष्टि है तो प्रदर्शित कीजिए कि

$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \le d(x_1x_2) + d(y_1, y_2) \; \forall \; x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$

8. Let (x, d) is a metric space then A is open sebet of x if and only if $A^0 = A$

माना (x, d) एक दूरीक समष्टि है तब X का एक उपसमुच्चय A विवृत होगा यदि और केवल यदि $A^0 = A$

Section - C / खण्ड-ग

(Objective Type Questions) / (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Note : Section 'C' contains ten (10) objective-type questions of ½ mark each. All the questions of this section are compulsory. (10×½=5)

नोट : खण्ड 'ग' में दस (10) वस्तुनिष्ठ प्रश्न दिये गए हैं, प्रत्येक प्रश्न के लिए एक (½) अंक निर्धारित है । इस खण्ड के सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

Write T for true and F for false statement.

1. The vlaue of $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\right]$ is ..... .

   मान ज्ञात करो $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\right]$ = ...

2. Necessary and sufficient condition for Riemann integrability is ..... .

   रीमान समाकलनीयता के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है।

   ..... .

Write T for true and F for false statement

3. If a function $f \in R[a, b]$ then for any real number k, $kf \in R[a, b]$

   यदि फलन $f \in R[a, b]$ तथा k कोई वास्तविक राशि नहीं है तब $kf \in R[a, b]$

4. $\int_a^b |f(x)|dx \le \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

5. If f and g are bounded at the closed interval [a, b] and Riemann integrable and $f(x) \ge g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$ then

$\int_a^b g(x)dx$ ___ $\int_a^b f(x)dx$

यदि f और g, [a, b] पर परिबद्ध है एवं रीमान समाकलनीय है तथा यदि $f(x) \ge g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$ तब

$\int_a^b g(x)dx$ ___ $\int_a^b f(x)dx$

Choose the correct option

6. An open sphere whose centre is at x_0 and radius is r then $s(x_0, r)$ is define as

(a) $\{x \in X : (d(x, x_0) \le r\}$ (b) $\{x \in X : (d(x, x_0) < r\}$

(c) $\{x \in X : (d(x, x_0) > r\}$ (d) $\{x \in X : (d(x, x_0) \ge r\}$

एक विकृत मोलक जिसका केन्द्र x_0 हो और त्रिज्या r हो तो $s(x_0, r)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

(a) $\{x \in X : (d(x, x_0) \le r\}$ (b) $\{x \in X : (d(x, x_0) < r\}$

(c) $\{x \in X : (d(x, x_0) > r\}$ (d) $\{x \in X : (d(x, x_0) \ge r\}$

7. Let (x,d) be a metric space A, B are the subset of x then

(a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (b) $\overline{A \cap B} \supset \bar{A} \cap \bar{B}$

(c) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (d) $\overline{A \cap B} \supseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

माना (x,d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, B, X के दो उपसमुच्चय है तब

(a) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ (b) $\overline{A \cap B} \supset \bar{A} \cap \bar{B}$

(c) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (d) $\overline{A \cap B} \supseteq \bar{A} \cap \bar{B}$

8. Minkowski's inequality when $p \geq 1$

(a) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(b) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} \geq \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(c) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} > \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(d) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} < \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

असीमका, तब जब $p \geq 1$

(a) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} \leq \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(b) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} \geq \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(c) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} > \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

(d) $\left[\sum_{|i=1|}^{n}(ai+bi)^p\right]^{1/p} < \left(\sum_{|i=1|}^{n} ai^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{|i=1|}^{n} bi^p\right)^{1/p}$

9. Let (X, d) be a metric space, $A \subset X, x \in X$ the x is a limit point of $A \ \forall \ r > 0$

(a) $\left[S(x,r)-\{x\}\right] \cap A \neq \Phi$

(b) $\left[S[x,r]-\{x\}\right] \cap A \neq \Phi$

(c) $\left[S(x,r)-\{x\}\right] \cap A = \Phi$

(d) $\left[S[x,r]-\{x\}\right] \cap A = \Phi$

माना (X, d) दूरीक समष्टि है तथा $A \subset X, x \in X$ तब x, A का सीमा बिन्दु कहलाएगा जब

(a) $\left[S(x,r)-\{x\}\right] \cap A \neq \Phi$

(b) $\left[S[x,r]-\{x\}\right] \cap A \neq \Phi$

(c) $\left[S(x,r)-\{x\}\right] \cap A = \Phi$

(d) $\left[S[x,r]-\{x\}\right] \cap A = \Phi$

10. Value of $\overline{[0,1]}$

(a) [0, 1] (b) (0, 1)

(b) [0, 1) (d) (0, 1]

मान $\overline{[0,1]}$

(a) [0, 1] (b) (0, 1)

(b) [0, 1) (d) (0, 1]